MINISTERE DE L'EQUIPEMENT,
DES TRANSPORTS ET DU TOURISME

CONCOURS COMMUN 1994
ENTPE, ENSG. ENTM, ENSTIMD

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES OPTION

Temps accordé : 4 heures
(4 pages)

L'épreuve comporte deux problèmes totalement indépendants appelés A et B.

PROBLEME A

Notations et données

* Pour p et q entiers supérieurs ou égaux à 1, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de p lignes et q colonnes et à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, qui pourra être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
* $\mathbf{O}_{p,q}$ est la matrice nulle de p lignes et q colonnes ;
* $\mathbf{I}_p$ est la matrice "unité" de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ qu'on pourra noter $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$;
* On pourra, sans en justifier le calcul, pratiquer des produits de matrices écrites "par blocs" quand ces produits pourront être effectués (nombre de colonnes et de lignes compatibles) ;
* Pour $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on note det(**M**) le déterminant de **M** ;
* $\mathbb{K}^p$ pourra être identifié selon l'usage à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$;
* Les parties I et II sont indépendantes entre elles mais utilisent la partie préliminaire ;

* Dans tout le problème, on note : $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

A Partie préliminaire

A 1 : a) Justifier que **C** est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Quel est le rang de **C** ?

b) Déterminer les valeurs propres de **C**, ainsi qu'une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres pour **C**.

c) Calculer $\mathbf{C}^2$ et l'exprimer en fonction de **C**.

A 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$, décomposée par blocs, et "diagonale par blocs" :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O}_{3,3} & & \mathbf{O}_{3,3} \\ \mathbf{O}_{3,3} & \mathbf{C} & & \\ & & & \mathbf{O}_{3,3} \\ \mathbf{O}_{3,3} & & \mathbf{O}_{3,3} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de **M** et leur ordre de multiplicité.

b) Justifier que **M** est diagonalisable, et indiquer une base de $\mathbb{R}^{3n}$ formée de vecteurs propres pour **M**.

A Première partie

A3 : Soient $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$; montrer que les deux matrices $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1$ ont le même polynôme caractéristique. Pour cela, on pourra éventuellement commencer par traiter le cas où $\mathbf{M}_1$ est supposée inversible puis étendre le résultat au cas général, en considérant par exemple une suite $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles ayant $\mathbf{M}_1$ pour limite. (On rappelle que toute matrice $\mathbf{M}_1$ est limite d'une suite de matrices inversibles).

A4 : Justifier l'existence de deux matrices $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{B}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{C}$ (on pourra utiliser une relation qui existe entre les trois colonnes de la matrice $\mathbf{C}$).

A5 : Soit un couple quelconque de matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ telles que :
$\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{C}$

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\left[\det(\mathbf{A}.\mathbf{B}-\lambda\,\mathbf{I}_3)\right]^n = (-\lambda)^n\left[\det(\mathbf{B}.\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}_2)\right]^n$$

Pour cela on pourra utiliser les matrices $\mathbf{A}'$ et $\mathbf{B}'$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ écrites par blocs :

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O}_{3,1}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix}\mathbf{B} \\ \mathbf{O}_{1,3}\end{pmatrix}$$

ou bien utiliser tout autre produit de matrices par blocs.

b) Déterminer les valeurs propres de $\mathbf{BA}$ ainsi que leur ordre de multiplicité.

c) En déduire explicitement $\mathbf{BA}$ puis $\mathbf{M}_0$, où $\mathbf{M}_0\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice :

$$\begin{pmatrix}\mathbf{BA} & \mathbf{O}_{2,2} & & \mathbf{O}_{2,2} \\ \mathbf{O}_{2,2} & \mathbf{BA} & & \\ & & & \\ \mathbf{O}_{2,2} & \mathbf{O}_{2,2} & & \mathbf{BA}\end{pmatrix}$$

A Deuxième partie

Dans cette partie, on note $\mathbf{P} = \alpha.\mathbf{C} + \beta.\mathbf{I}_3$, où α et β sont deux nombres complexes.

A.6 Calculer $\mathbf{P}^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en fonction de n, α, β, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{I}_3$

A.7 On considère la suite $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ (identifié à $\mathbb{C}^3$), définie par la donnée de $\mathbf{X}_0$ et la relation valable pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{P}.\mathbf{X}_n$ (On supposera $\mathbf{X}_0$ non nulle).

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{X}_n$ en fonction de α, β, n, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{X}_0$.

b) On suppose dans cette question α et β réels. A quelles conditions la suite $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle convergente ? (On discutera en fonction de $\mathbf{X}_0$, α et β).

PROBLEME B

Dans ce problème, $\mathcal{E}_3$ désigne l'espace affine euclidien de dimension 3, orienté, rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle éléments géométriques
* d'un cône : son sommet et une directrice;
* d'un cylindre : la direction de ses génératrices et une courbe directrice ;
* d'une surface de révolution : son axe et une demi-méridienne.

A tout couple (α, β) de réels tels que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ on associe la quadrique $\Sigma_{\alpha,\beta}$ d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$: $\alpha(x^2 + y^2 + z^2 - 4) + \beta(x^2 + y^2 - 2x) = 0$.

B Première partie

B.1 On se propose de déterminer suivant α et β, la nature de la quadrique $\Sigma_{\alpha,\beta}$ et d'en donner des éléments géométriques qui la caractérisent. Etudier les cas suivants :

1) $\alpha \neq 0$ et $\beta = -\alpha$; 2) $\beta \neq 0$ et $\alpha = 0$;

3) $\alpha \neq 0$ et $\beta = -2\alpha$; 4) $\alpha+\beta \neq 0$ et $\alpha \neq 0$.

Tous les cas de la discussion ont-ils été répertoriés ?

B Deuxième partie

B.2 Le point M de $\Sigma_{\alpha,\beta}$ ayant pour coordonnées (x, y, z) dans $\mathcal{R}$, déterminer un vecteur $\vec{N}_M$ normal en M à $\Sigma_{\alpha,\beta}$.

B.3 En déduire qu'il existe un point A commun à toutes les surfaces $\Sigma_{\alpha,\beta}$ en lequel, pour $2\alpha+\beta \neq 0$, le plan tangent est indépendant de (α, β).

Donner les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$ et une équation cartésienne de ce plan tangent commun.

B.4 Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$, appartenant à $\Sigma_{\alpha,\beta}$. Donner une équation cartésienne du plan Π_{M_0} tangent en M_0 à $\Sigma_{\alpha,\beta}$.

Pour $\beta \neq 0$ montrer qu'il existe un plan P d'équation (dans $\mathcal{R}$) de la forme x = a, tel que l'on ait l'équivalence : $M \in P \cap \Sigma_{\alpha,\beta} \Leftrightarrow \Pi_M$ contient l'origine O.

Quelle est la nature de $P \cap \Sigma_{\alpha,\beta}$?

B Troisième partie

B.5 Montrer qu'il existe une courbe $\mathcal{C}$ tracée sur toutes les surfaces $\Sigma_{\alpha,\beta}$. Déterminer un vecteur tangent à $\mathcal{C}$, en un point $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ appartenant à $\mathcal{C} \setminus \{A\}$.

B.6 Soit $\mathcal{C}_1$ la partie de $\mathcal{C}$ des points M (x, y, z) avec $z \geq 0$. Donner un paramètrage de $\mathcal{C}_1$: on écrira x, y, z comme fonctions trigonométriques simples d'une variable t dont on précisera l'intervalle de variation.

B.7 Exprimer la longueur de $\mathcal{C}$ à l'aide d' une intégrale que l'on écrira sous la forme la plus simplifiée possible, mais que l'on ne calculera pas.

B Quatrième partie

B.8 On considère le compact K de $\mathcal{E}_3$ situé "au dessus du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ " , $(z \geq 0)$, limité par $\Sigma_{1,0}$ et $\Sigma_{0,1}$, et qui contient le point I(1, 0, 0).

Calculer le volume de K.